

Lista de Exercícios

Revisão UEM

1. Considere os polinômios

$p(x) = (m^2 + 1)x^2 - x + m + 1$ e $q(x) = (m + 2)x^2 + mx$, com m um número real fixado. Assinale o que for correto.

01) Os polinômios p e q são iguais se $m = -1$.

02) $x = 0$ é raiz do polinômio q para qualquer valor de m .

04) O grau dos polinômios p e q é 2 para todo valor de m .

08) O gráfico da função polinomial real f a valores reais dada por $f(x) = p(x)$ é uma parábola, independentemente do valor de m .

16) Para $m = 1$, temos que $q(3) = 30$.

2. Considere as funções reais a valores reais $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 - 1$. Assinale o que for correto.

01) $(f \circ g)(3) = (f \cdot g)(3)$.

02) O gráfico da função $f \circ g$ é igual ao gráfico da $g(x)$ transladado de 2 unidades no eixo y .

04) O conjunto imagem da função f é igual ao conjunto imagem da função g .

08) Os gráficos das funções f e g interceptam o eixo x nos mesmos pontos.

16) Há exatamente dois valores de x para os quais $f(x) = g(x)$.

3. Assinale o que for correto.

01) Uma P.A. em que $a_7 = 3a_1$ e $a_4 = 6$ tem razão igual a 1.

02) Se x , y e z são, nessa ordem, três termos consecutivos de uma P.G., então $y^2 = xz$.

04) A sequência definida recursivamente como $a_1 = 10$ e $a_{n+1} = \frac{3a_n + 8}{6}$ é uma P.A. de razão $\frac{4}{3}$.

08) Há um inteiro k tal que o k -ésimo termo da P.A. (2, 7, 12, ...) e o k -ésimo termo da P.A. (552, 532, 512, ...) são iguais.

16) A sequência definida por $a_n = 3^{2-n}$ é uma P.G. de razão negativa.

4. Assinale o que for correto.

01) O polinômio $x^4 - 7x^2 + 6x$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x$.

02) Há um polinômio $p(x)$ de grau 1 tal que $(x^2 + x)p(x) = x^3 + 3x^2 - x$.

04) Há um polinômio de grau 3, com coeficientes reais, cujas raízes são $1+i$, $1-i$ e i , que i é a unidade imaginária.

08) Se $p(x) = ax^2 + 3x + 1$ e $q(x) = bx^2 - x + 5$ são polinômios de grau 2, tais que $p(3) + q(3) = 12$, então $p(x) + q(x)$ é um polinômio de grau 1.

16) Se $q(x) = (p(x) - 1)(2x^3 + 5x^2 - 1) + r(x)$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e 2 é uma raiz de $p(x)$, então $q(2) - r(2) = -20$.

5. Considere as funções reais a valores reais $f(x) = -x^2 + x + 6$ e $g(x) = 5x + 7$. Assinale o que for correto.

01) $g(1) = 2 \cdot f(1)$.

02) O gráfico de f intercepta o eixo x em dois pontos distintos.

04) Os gráficos das funções f e g não se interceptam.

08) A imagem da função f é o intervalo $[6, +\infty)$.

16) O gráfico da função composta $f \circ g$ é uma parábola de concavidade voltada para baixo.

6. Assinale o que for correto.

01) A média aritmética dos divisores positivos de 12 é um divisor de 12.

02) O mínimo múltiplo comum de quaisquer dois números naturais, distintos e maiores que 1, é um número composto.

04) O máximo divisor comum de quaisquer dois números naturais, ímpares e maiores que 1, é um número primo.

08) A quantidade de divisores positivos de 360 é 50% maior que a quantidade de divisores positivos de 180.

16) A interseção do conjunto dos divisores e do conjunto dos múltiplos de um número natural não nulo é um conjunto não vazio.

7. Assinale o que for **correto**.

01) Os números complexos $-3i$ e $3i$ são raízes do polinômio $x^3 - 4x^2 + 9x - 36$.

02) O polinômio $2x^3 - 13x^2 + 16x - 5$ é divisível por $x - 5$.

04) A soma das raízes do polinômio $(x + 11) \cdot (x + 8) \cdot (x + 5) \cdot (x + 2) \cdot \dots \cdot (x - 31)$ é igual a 100.

08) Se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então, para todo número natural par $n > 0$, o polinômio $(p(x))^n$ tem grau par.

16) O resto da divisão do polinômio $8x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14x - 1$ pelo polinômio $2x^2 + 3$ é igual a $4x^2 + 1$.

8. Considere as funções

$$f(x) = 3x + 9, g(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ e } h(x) = \frac{x^3 - 9x^2}{x^2 - 9}.$$

Assinale o que for correto.

01) O gráfico da função $h(x)$ não passa pela origem do sistema cartesiano.

02) Os domínios das funções $h(x)$ e $\frac{g(x)}{f(x)}$ são iguais.

04) Os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam em dois pontos distintos.

08) $\text{Im}(g) = [-3, +\infty)$.

16) Pelo menos uma das três funções dadas no enunciado de comando (*caput*) é bijetora.

9. Assinale o que for correto.

- 01) A equação $x^6 = 4x^2$ possui seis soluções reais.
- 02) O polinômio $-x^3 + 3x^2 + 8x + 4$ possui ao menos duas raízes inteiras.
- 04) A soma dos inversos das raízes do polinômio $2x^2 + 6x + 5$ é igual a -1 .
- 08) O polinômio $x^7 + x^5 + 3x^4 + 5x - 3$ não é divisível por $x - i$, em que i é a unidade imaginária.
- 16) As raízes do polinômio dado por $p(x) = \det \begin{pmatrix} x & x \\ x+1 & -2 \end{pmatrix}$ são 2 e -1 .

10. A função horária das posições de uma partícula em movimento uniformemente variado, sobre uma pista retilínea, é dada por $s(t) = 3t^2 + 7t - 10$, em que t é medido em segundos e s , em metros. Assinale o que for correto.

- 01) O produto e a soma das raízes da equação $s(t) = 0$ são, respectivamente, -10 e -7 .
- 02) A posição da partícula em $t = 5$ s é 100 m.
- 04) A velocidade da partícula em $t = 10$ s é igual a 37 m/s.
- 08) O movimento muda de sentido em algum instante pertencente ao intervalo $[1, 2]$.
- 16) $t = 1$ s é um instante em que a partícula se encontra na origem do referencial da trajetória.

11. Considere as funções reais $f(x) = x^2 - 3x - 4$ e $g(x) = x^2 + 3x - 4$. Assinale o que for correto.

- 01) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} \subseteq \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.
- 02) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} = \{-4, -1, 1, 4\}$.
- 04) Os gráficos $f(x)$ e $g(x)$ são parábolas que têm os mesmos vértices.
- 08) $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.
- 16) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\} = [-1, 1]$.

12. Considere os polinômios

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)^5(x-4)(x-11)^6$$

$$q(x) = (x^2 + 2)(x^3 - 2x^2 + 4)$$

Assinale o que for correto.

- 01) O grau de $p(x)$ é igual a 60.
- 02) Todas as raízes de $p(x)$ são inteiras e positivas.
- 04) O polinômio $q(x)$ tem no máximo 3 raízes reais.
- 08) A soma das raízes de $q(x)$ é igual a 2.
- 16) O resto da divisão de $p(x)$ por $(x-2)^3(x-11)^4$ é igual a 0.

Gabarito:

Resposta da questão 1:

$$02 + 08 + 16 = 26.$$

[01] Falsa. Se $m = -1$, teremos:

$$p(x) = ((-1)^2 + 1)x^2 - x + (-1) + 1 = 2x^2 - x$$

$$q(x) = ((-1) + 2)x^2 + (-1)x = x^2 - x$$

Ou seja, os polinômios não serão iguais.

[02] Verdadeira. Como:

$$q(0) = (m + 2) \cdot 0^2 + m \cdot 0 = 0$$

Podemos afirmar que $x = 0$ é raiz de q para qualquer valor de m .

[04] Falsa. Para $m = -2$, q tem grau 1.

[08] Verdadeira. Como o polinômio p é do 2º grau (para qualquer valor real de m), o seu gráfico é uma parábola.

[16] Verdadeira. Para $m = 1$ e $x = 3$, teremos:

$$q(3) = (1 + 2) \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 = 30$$

Resposta da questão 2:

$$02 + 16 = 18.$$

[01] Falsa. Calculando:

$$(f \circ g)(3) = (3^2 - 1) + 2 = 10$$

$$(f \cdot g)(3) = (3 + 2) \cdot (3^2 - 1) = 40$$

$$\therefore (f \circ g)(3) \neq (f \cdot g)(3)$$

[02] Verdadeira. Função $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = (x^2 - 1) + 2 = x^2 + 1$$

O que equivale ao gráfico de $g(x)$ translado de 2 unidades no sentido positivo do eixo y .

[04] Falsa. O ponto de ordenada mínima da função g é $y_v = -1$. Logo, os conjuntos imagens das funções são:

$$\text{Im}_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}_g = [-1, +\infty[$$

$$\therefore \text{Im}_f \neq \text{Im}_g$$

[08] Falsa. As funções f e g interceptam o eixo x nos pontos:

$$0 = x + 2 \Rightarrow x = -2 \quad \therefore f \longrightarrow (-2, 0)$$

$$0 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \therefore g \longrightarrow (-1, 0) \text{ e } (1, 0)$$

[16] Verdadeira. Os valores de x para os quais $f(x) = g(x)$ são dados por:

$$x + 2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

Como:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 13 > 0$$

Podemos afirmar que dois valores de x satisfazem a condição.

Resposta da questão 3:

$$01 + 02 + 08 = 11.$$

[01] Verdadeira. A razão da PA deve ser igual a:

$$\begin{cases} a_7 = 3a_1 \\ a_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6r = 3a_1 \\ a_1 + 3r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3r \\ a_1 = 6 - 3r \end{cases} \Rightarrow 3r = 6 - 3r \quad \dots$$

[02] Verdadeira. Se x , y e z são termos de uma PG, devemos ter que:

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow y^2 = xz$$

[04] Falsa. Segundo termo da sequência:

$$a_2 = \frac{3a_1 + 8}{6} = \frac{3 \cdot 10 + 8}{6} = \frac{19}{3}$$

Caso a sequência seja uma PA, a sua razão deve valer:

$$r = \frac{19}{3} - 10 = -\frac{11}{3}$$

[08] Verdadeira. Igualando os k -ésimos termos das PAs, obtemos:

$$2 + (k - 1) \cdot 5 = 552 + (k - 1) \cdot (-20)$$

$$2 + 5k - 5 = 552 - 20k + 20$$

$$25k = 575$$

$$k = 23$$

Portanto, o 23º termo das PAs são iguais.

[16] Falsa. Primeiro termo da sequência:

$$a_1 = 3^{2-1} = 3$$

Segundo termo da sequência:

$$a_2 = 3^{2-2} = 1$$

Razão da PG:

$$q = \frac{1}{3}$$

Resposta da questão 4:

$$01 + 08 = 09.$$

[01] Verdadeira. Dividindo:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 7x^2 + 6x \quad | \quad x^2 - x \\
 -x^4 + x^3 \\
 \hline
 x^3 - 7x^2 + 6x \\
 -x^3 + x^2 \\
 \hline
 -6x^2 + 6x \\
 6x^2 - 6x \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Os gráficos das funções f e g se interceptam em dois pontos distintos.

[08] Falsa. Ordenada máxima do gráfico da função f :

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{4 \cdot (-1)} = 6,25$$

Sendo assim, a sua imagem é dada pelo intervalo $(-\infty, 6,25]$.

[16] Verdadeira. Determinação da função composta $f \circ g$:

$$f \circ g(x) = -(5x + 7)^2 + (5x + 7) + 6$$

$$f \circ g(x) = -25x^2 - 70x - 49 + 5x + 13$$

$$f \circ g(x) = -25x^2 - 65x - 36$$

Portanto, o gráfico da função composta $f \circ g$ é uma parábola de concavidade voltada para baixo.

Resposta da questão 6:

$$02 + 16 = 18.$$

[01] Falsa. Os divisores positivos de 12 são $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. E a média aritmética desses números vale:

$$\frac{1+2+3+4+6+12}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

Ou seja, o seu valor não é um divisor de 12.

[02] Verdadeira. O mínimo múltiplo comum de dois números naturais distintos e maiores que 1 pode ser escrito como o produto de pelo menos 2 números primos, o que o torna um número composto.

[04] Falsa. Para os números 9 e 27, por exemplo, o máximo divisor comum é 9, que não é primo.

[08] Falsa. Quantidade de divisores positivos de 360:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$n_{360} = (3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 24$$

Quantidade de divisores positivos de 180:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$n_{180} = (2+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 18$$

Como $\frac{24}{18} \cong 1,33$, o aumento é de

aproximadamente 33%, e não de 50%.

[16] Verdadeira. Como o próprio número está contido no conjunto dos seus divisores e no dos seus múltiplos, a interseção entre esses conjuntos é um conjunto não vazio.

Resposta da questão 7:

$$01 + 02 + 08 = 11.$$

[01] Verdadeira. Raízes do polinômio:

[02] Falsa. Temos que:

$$p(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + 3x - 1)}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x+1}$$

Como o numerador não é divisível pelo denominador (não há termo em comum), não existe $p(x)$ de grau 1 que satisfaça a condição do enunciado.

[04] Falsa. Como os coeficientes do polinômio são reais, os conjugados das raízes complexas também devem ser raízes do polinômio, ou seja, $-i$ também deveria ser raiz.

[08] Verdadeira. Como:

$$p(3) + q(3) = 9a + 9 + 1 + 9b - 3 + 5 = 12 \Rightarrow a + b = 0$$

A soma $p(x) + q(x)$ é um polinômio de grau 1.

[16] Falsa. Calculando:

$$q(2) - r(2) = (\underbrace{p(2)}_0 - 1)(2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 1) + \cancel{r(2)} - \cancel{r(2)}$$

$$q(2) - r(2) = (-1)(16 + 20 - 1)$$

$$\therefore q(2) - r(2) = -35$$

Resposta da questão 5:

$$01 + 02 + 16 = 19.$$

[01] Verdadeira. Calculando:

$$g(1) = 5 \cdot 1 + 7 = 12$$

$$f(1) = -1^2 + 1 + 6 = 6$$

Portanto, $g(1) = 2 \cdot f(1)$.

[02] Verdadeira. Como:

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$\Delta = 25 > 0$$

O gráfico de f intercepta o eixo x em dois pontos distintos.

[04] Falsa. Como:

$$-x^2 + x + 6 = 5x + 7$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 12 > 0$$

[08] Verdadeira. Fazendo $x = i$, obtemos:

$$i^7 + i^5 + 3i^4 + 5i - 3 = -i + i + 3 + 5i - 3 = 5i \neq 0$$

Ou seja, $x = i$ não é raiz do polinômio.

[16] Falsa. As raízes de $p(x)$ são:

$$p(x) = -2x - x(x+1) = -x^2 - 3x$$

$$-x(x+3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -3$$

Resposta da questão 10:

$$02 + 16 = 18.$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Matemática]

[01] Falsa. Pondo $s(t) = 0$, vem $3t^2 + 7t - 10 = 0$.

Assim, pelas Relações de Girard, podemos afirmar que o produto e a soma das raízes dessa

$$\text{equação são, respectivamente, } -\frac{10}{3} \text{ e } -\frac{7}{3}.$$

[02] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} s(5) &= 3 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 10 \\ &= 75 + 35 - 10 \\ &= 100 \text{ m.} \end{aligned}$$

[04] Falsa. Sendo $v_0 = 7 \text{ m/s}$ e $a = 6 \text{ m/s}^2$, temos

$$v(t) = 7 + 6t. \text{ Daí, encontramos}$$

$$\begin{aligned} v(10) &= 7 + 6 \cdot 10 \\ &= 67 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

[08] Falsa. Sabendo que $v_0 > 0$ e $a > 0$, podemos concluir que o movimento da partícula é progressivo uniformemente acelerado. Desse modo, o movimento da partícula não muda de sentido em nenhum instante.

[16] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\begin{aligned} s(1) &= 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 10 \\ &= 3 + 7 - 10 \\ &= 0. \end{aligned}$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Física]

[01] Falsa. Da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, o produto das raízes e a soma das raízes são

$$\text{respectivamente } \frac{c}{a} \text{ e } -\frac{b}{a}.$$

$$\text{Assim, o produto das raízes é } -\frac{10}{3} \text{ e a soma das}$$

$$\text{raízes é } -\frac{7}{3}.$$

[02] Verdadeira. A posição da partícula em 5 s é:

$$s(t = 5 \text{ s}) = 3(5)^2 + 7(5) - 10 \Rightarrow$$

$$s(t = 5 \text{ s}) = 75 + 35 - 10 \therefore$$

$$\therefore s(t = 5 \text{ s}) = 100 \text{ m}$$

[04] Falsa. Da função horária das posições fornecida, extrai-se a posição inicial (s_0), a velocidade inicial (v_0) e a aceleração (a).

$$s_0 = -10 \text{ m}$$

$$v_0 = 7 \text{ m/s}$$

$$a = 6 \text{ m/s}^2$$

Substituindo-se na função horária das velocidades, tem-se:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$v(t) = 7 + 6t$$

Logo, a velocidade em 10 segundos de movimento é:

$$v(10 \text{ s}) = 7 + 6 \cdot 10 \therefore$$

$$\therefore v(10 \text{ s}) = 67 \text{ m/s}$$

[08] Falsa. O movimento muda de sentido quando a velocidade é nula.

$$v(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 + 6t = 0 \therefore$$

$$\therefore t = -\frac{7}{6} \text{ s}$$

Como tempo negativo não tem sentido físico, pois significa algo que aconteceu antes de começar a marcar o tempo, indica que o móvel não muda o sentido de movimento durante o experimento e o intervalo de tempo apresentado está incorreto.

[16] Verdadeira. Com a função horária das posições verifica-se no tempo de 1 s se a posição informada está correta, ou seja, se neste tempo o móvel está cruzando a origem das posições.

$$s(t = 1 \text{ s}) = 3(1)^2 + 7(1) - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(t = 1 \text{ s}) = 3 + 7 - 10 \therefore$$

$$\therefore s(t = 1 \text{ s}) = 0$$

Resposta da questão 11:

$$01 + 02 + 08 + 16 = 27.$$

[01] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = x^2 + 3x - 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $\{0\} \subseteq \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

[02] Verdadeira. Com efeito, pois $f(x) = 0$ se, e

somente se, $x \in \{-1, 4\}$ e $g(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \{-4, 1\}$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} &= \{-1, 4\} \cup \{-4, 1\} \\ &= \{-4, -1, 1, 4\}. \end{aligned}$$

[04] Falsa. Como $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ e

$g(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$, segue que o vértice do gráfico de f é $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$, enquanto que o vértice do gráfico de g é $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

[08] Verdadeira. De fato, sendo $y_v = -\frac{25}{4}$ tanto em f como em g , temos $\text{Im}(f) = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right) = \text{Im}(g)$.

[16] Verdadeira. Com efeito, pois $f(x) \leq 0$ se, e somente se, $(x-4)(x+1) \leq 0$, ou seja, $x \in [-1, 4]$; e $g(x) \leq 0$ se, e somente se, $(x-1)(x+4) \leq 0$, isto é, $x \in [-4, 1]$. Portanto, segue que $[-1, 4] \cap [-4, 1] = [-1, 1]$.

Resposta da questão 12:

$02 + 04 + 08 + 16 = 30$.

[01] Falsa. O grau de $p(x)$ é igual a $2 + 5 + 1 + 6 = 14$.

[02] Verdadeira. Com efeito, as raízes de $p(x)$ são 1, 2, 4 e 11.

[04] Verdadeira. De fato, pois $x^2 + 2 = 0$ não possui raízes reais. Logo, como $x^3 - 2x^2 + 4 = 0$ possui no máximo três raízes reais, segue o resultado.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois, pelas Relações de Girard, a soma das raízes de $x^2 + 2 = 0$ é zero. Ademais, também pelas Relações de Girard, a soma das raízes de $x^3 - 2x^2 + 4 = 0$ é $-\frac{-2}{1} = 2$. Portanto, a soma das raízes de $q(x)$ é igual a 2.

[16] Verdadeira. De fato, pois

$$\frac{(x-1)^2(x-2)^5(x-4)(x-11)^6}{(x-2)^3(x-11)^4} = (x-1)^2(x-2)^2(x-4)(x-11)^2,$$

ou seja, $p(x)$ é divisível por $(x-2)^3(x-11)^4$.