

Lista de Exercícios

Equações Trigonométricas

Prof. João Capri

1. Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s).

01) A equação $\cos x = 1$ admite quatro soluções no intervalo $[0, 4\pi]$.

02) A equação $\sin(2x) = \sin x$ admite três soluções no intervalo $[0, \pi]$.

04) Se $x \in (0, \pi)$, então $\cos x > 0$.

08) A função $f(x) = \cos(x^3)$ é uma função ímpar.

16) $\cos(3^\circ) = \sin(87^\circ)$.

2. Sabendo que $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ é igual a:

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

3. Sendo x a medida positiva de um ângulo em graus, o menor valor de x que satisfaz a equação $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ é

- a) 120°
- b) 180°
- c) 135°
- d) 210°
- e) 240°

4. Seja $A = \begin{bmatrix} \sin x & 1 \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$, com $0 < x < 2\pi$ e sabendo que $\det A = 0$, temos que $x =$

- a) $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$
- b) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$
- c) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$
- d) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

5. O conjunto solução da equação $2 \cdot \sin 2x = \sqrt{3}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, é

- a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$
- b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
- c) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
- d) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
- e) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$

6. Identifique o ângulo x , em radianos, do intervalo $[0, 2\pi]$ cujo $\sin x$ é igual ao $\sin 2x$.

- a) $\frac{\pi}{9}$ rad
- b) $\frac{\pi}{4}$ rad
- c) $\frac{\pi}{6}$ rad
- d) $\frac{\pi}{2}$ rad
- e) $\frac{\pi}{3}$ rad

7. Pedro é professor de matemática e propôs um desafio aos seus alunos, no qual daria um ponto extra na média de quem conseguisse dizer o número de raízes da seguinte equação trigonométrica:

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Sabendo que $0 \leq x \leq 360^\circ$.

João conseguiu acertar o desafio! Qual foi a resposta de João?

- a) 3.
- b) 4.
- c) 0.
- d) 1.
- e) 2.

8. O número de soluções da equação

$$2\cos^2(x) - \sin(x) = 1 \text{ no intervalo } [0, 2\pi] \text{ é}$$

- a) 2
- b) 3
- c) 1
- d) nenhum

9. Determine o conjunto solução da equação trigonométrica $\sin(x) = \cos(x)$.

- a) $7\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- b) $5\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- c) $3\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- d) $\pi/4 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- e) $\pi/4 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

10. Se $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ e se $\sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é

- a) 30°
- b) 45°
- c) 75°
- d) 85°

11. O número de raízes reais da equação

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \text{ no intervalo }]0, 2\pi[\text{ é}$$

- a) 0.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 3.
- e) 4.

12. O número de soluções que a equação

$$4\cos^2 x - \cos 2x + \cos x = 2 \text{ admite no intervalo } [0, 2\pi] \text{ é}$$

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

13. Dentre as equações abaixo, assinale aquela que tem **uma única** solução em $]-\pi, \pi]$.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$
- b) $\operatorname{sen} \alpha = 0$
- c) $\cos \alpha = -1$
- d) $\operatorname{tg} \alpha = 0$
- e) $\cos \alpha = -2$

14. O conjunto solução da equação $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi]$, é

- a) $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$
- b) $\{\pi/6, \pi, 5\pi/6\}$
- c) $\{\pi/3, \pi/6, \pi\}$
- d) $\{\pi/6, \pi/3, \pi, 2\pi/3, 5\pi/3\}$
- e) $\{\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi\}$

15. No intervalo $[0, \pi]$ a equação $\tan x - 1 = 0$

- a) não possui raízes.
- b) possui uma única raiz.
- c) possui apenas 2 raízes.
- d) possui exatamente 4 raízes.
- e) possui infinitas raízes.

16. O conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$, no universo $U = [0, 2\pi]$, é

- a) $\{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 2\pi\}$
- b) $\{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi\}$
- c) $\{0, \pi/3, \pi/2, \pi, 2\pi\}$
- d) $\{0, \pi/4, \pi/3, 2\pi\}$
- e) $\{0, \pi/3, \pi, 2\pi\}$

17. O conjunto-solução da equação $\cos 2x = 1/2$, onde x é um arco da 1ª volta positiva, é dado por:

- a) $\{60^\circ, 300^\circ\}$
- b) $\{30^\circ, 330^\circ\}$
- c) $\{30^\circ, 150^\circ\}$
- d) $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$
- e) $\{15^\circ, 165^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$

18. A soma das raízes da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $0 < x < 2\pi$, é

- a) π
- b) 4π
- c) 3π
- d) $7\pi/2$
- e) $5\pi/2$

Gabarito:

Resposta da questão 1:

02 + 16 = 18.

Resposta da questão 2:

[E]

Resposta da questão 3:

[D]

Resposta da questão 4:

[B]

Resposta da questão 5:

[C]

Resposta da questão 6:

[E]

Resposta da questão 7:

[A]

Resposta da questão 8:

[B]

Resposta da questão 9:

[B] ou [D]

Resposta da questão 10:

[C]

Resposta da questão 11:

[D]

Resposta da questão 12:

[D]

Resposta da questão 13:

[C]

Resposta da questão 14:

[A]

Resposta da questão 15:

[B]

Resposta da questão 16:

[B]

Resposta da questão 17:

[D]

Resposta da questão 18:

[C]

Gabarito:

Resposta da questão 1:

$$02 + 16 = 18.$$

[01] Falsa. A equação possui apenas três soluções no intervalo dado, pois:

$$\cos x = 1$$

$$x = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 4\pi$$

$$S = \{0, 2\pi, 4\pi\}$$

[02] Verdadeira. A equação possui três soluções no intervalo dado. São elas:

$$\sin(2x) = \sin x$$

$$2\sin x \cos x = \sin x$$

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$$

[04] Falsa. Para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos x < 0$.

[08] Falsa. Como:

$$f(-x) = \cos((-x^3)) = \cos(-x^3) = \cos x^3 = f(x)$$

A função f é par.

[16] Verdadeira. Temos que:

$$\cos(3^\circ) = \cos(90^\circ - 87^\circ) = \underbrace{\cos(90^\circ)}_0 \cos(87^\circ) + \underbrace{\sin(90^\circ)}_1 \sin(87^\circ)$$

Resposta da questão 2:

[E]

Resolvendo:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$$

$$k = 5 \Rightarrow x = \frac{23\pi}{12}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12}$$

$$k = 6 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

Portanto, a equação possui 6 soluções no intervalo dado.

Resposta da questão 3:

[D]

Temos a seguinte equação $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ e

lembrando que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, isto é:

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ e substituindo na equação dada, segue que:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Utilizando a fórmula quadrática na equação do 2º grau obtida, temos:

$$\sin x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 2 \text{ (não serve)}$$

Assim, o menor ângulo tal que $\sin x = -\frac{1}{2}$ é no 3º

quadrante, cuja redução ao 1º quadrante gera

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ assim } x = 210^\circ.$$

Resposta da questão 4:

[B]

Calculando o determinante da matriz, obtemos:

$$\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

Resposta da questão 5:

[C]

Resolvendo a equação:

$$2 \cdot \sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

ou $(k \in \mathbb{Z})$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

Resposta da questão 6:

[E]

Tem-se que

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Portanto, segue que $x = \frac{\pi}{3}$ rad é um dos ângulos que satisfaz a condição.

Resposta da questão 7:

[A]

Temos uma equação do segundo grau na incógnita

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$\sin x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \sin x = 1 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}$$

Temos, então, três soluções para $0 \leq x \leq 360^\circ$.
 $x = 90^\circ$, $x = 210^\circ$ e $x = 330^\circ$

Resposta [A].

Resposta da questão 8:

[B]

Aplicando a relação fundamental e resolvendo, chegamos a:

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1 \Rightarrow 2 - 2 \sin^2 x - \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = -1$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Ou seja, a equação possui 3 soluções no intervalo dado.

Resposta da questão 9:

[B] ou [D]

Desde que $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, vem

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observação: $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi$ e $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ são

equivalentes e, assim, geram as mesmas soluções.

Resposta da questão 10:

[C]

Como $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$,

$$0^\circ \leq 4x \leq 360^\circ$$

$$\text{De } \sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } 0^\circ \leq 4x \leq 360^\circ,$$

$$4x = 240^\circ \text{ ou } 4x = 300^\circ$$

Portanto, um dos possíveis valores de x é 75° .**Resposta da questão 11:**

[D]

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm 1}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4 \cdot \pi}{3}$$

Portanto, o número de raízes da equação é 3.

Resposta da questão 12:

[D]

$$4 \cos^2 x - \cos 2x + \cos x = 2$$

$$4 \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x = 2$$

$$4 \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 2$$

$$3 \cos^2 x + \underbrace{1 - \cos^2 x}_{\sin^2 x} + \cos x = 2$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -1$$

$$\text{De } \cos x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi],$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}.$$

De $\cos x = -1$, $x \in [0, 2\pi]$,

$x = \pi$.

Assim, a equação

$4\cos^2 x - \cos 2x + \cos x = 2$, $x \in [0, 2\pi]$, admite três soluções.

Resposta da questão 13:

[C]

É fácil ver que o conjunto solução da equação $\cos \alpha = -1$ é unitário em $] -\pi, \pi]$, ou seja, a única solução em $] -\pi, \pi]$ é $\alpha = \pi$. Todas as outras equações possuem duas soluções em $] -\pi, \pi]$, exceto $\cos \alpha = -2$, que não possui nenhuma solução em $\mathbb{R}$.

Resposta da questão 14:

[A]

Resposta da questão 15:

[B]

Resposta da questão 16:

[B]

Resposta da questão 17:

[D]

Resposta da questão 18:

[C]