Lista de Exercícios
Determinantes – Propriedades
Prof. João Capri

1. (Udesc) Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$, então $\det(A)$ é igual a:
a) 9 b) 0 c) 3 d) 6 e) 27

2. (Eewb) O determinante da matriz A_{4x4} onde os elementos da primeira linha são 4, 3, 5 e 1; os elementos da segunda linha são 0, 3, 0 e 2; os da terceira linha são 2, 7, 0 e 0 e os da quarta linha, 8, 6, 10 e 2,
a) - 5 b) 0 c) 5 d) 15

3. (Acafe) Analise as afirmações abaixo, sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

I. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ II. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = -6$

III. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$ IV. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

Assinale a alternativa correta.
a) Apenas I, III e IV são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação III é verdadeira.
c) Apenas I e II são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.

4. (Esa) Sejam A e B matrizes de ordem 2 tais que $\det A = 2$ e $\det B = 5$. Marque a alternativa que expressa o valor de $\det(2AB)$.
a) 30 b) 20 c) 40 d) 50 e) 10

5. (Epcar (Afa))
Sendo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 2 & c \end{vmatrix} = 70$, o valor de $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix}$
é:
a) 280 b) 0 c) -70 d) -210

6. (Epcar (Afa)) Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem **n**, bem como a matriz identidade I. Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det\left(I.B^{-1}.A\right) = \frac{1}{3}$, então o $\det\left[3.\left(B^{-1}.A^{-1}\right)^t\right]$ é igual a
a) $5 \cdot 3^n$ b) $\frac{3^{n-1}}{5^2}$ c) $\frac{3^n}{15}$ d) 3^{n-1}

7. (Fgv) Uma matriz 4 x 4 que admite inversa é
a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$

8. (Uel) A soma dos determinantes indicados a seguir é igual a zero

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$$

a) quaisquer que sejam os valores reais de a e de b
b) se e somente se a = b
c) se e somente se a = - b
d) se e somente se a = 0
e) se e somente se a = b = 1

9. (Pucmg) M é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é det(M)=2. O valor da expressão det(M)+det(2M)+det(3M) é:
a) 12 b) 15 c) 36 d) 54 e) 72

10. (Ufsj)
O determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é igual a S.
Para quaisquer valores reais tomados para os elementos de M, a matriz que possui determinante igual a $-6S$ é
a) $\begin{bmatrix} 6a_4 & 6a_5 & 6a_6 \\ 6a_1 & 6a_2 & 6a_3 \\ 6a_7 & 6a_8 & 6a_9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a_7 & 2a_8 & a_9 \\ 3a_4 & 6a_5 & 3a_6 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} -6a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & -6a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & -6a_9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 \\ 6a_4 & -6a_5 & -6a_6 \\ -a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$

11. (Fgv) A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det(A)=7. Nessas condições, det(3A) e det(A^{-1}) valem respectivamente:
a) 7 e -7 b) 21 e 1/7 c) 21 e -7
d) 63 e -7 e) 63 e 1/7

12. (Pucrs)
Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ m & t & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m & t & k \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ e $\det A = 4$ o determinante de B é igual a
a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 4 e) -4

13. (Integrado - Medicina) Sobre duas matrizes A e B, quadradas de ordem 3, com det (A) = 2 e det (B) = - 1, são dadas as afirmações:

I. $\det(A^T) = \frac{1}{2}$ II. $\det(-B) = 1$

III. $\det(A^{-1}) = -2$ IV. $\det(3A) = -27$

Destas afirmações, quantas estão corretas?
a) uma b) três c) duas d) nenhuma e) quatro

14. (Udesc) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Seja a matriz B tal que $A^{-1}BA = D$, onde a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, então o determinante de B é igual a:

a) 3 b) –5 c) 2 d) 5 e) –3

15. (Fei) Sendo x e y respectivamente os determinantes das matrizes inversíveis:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix}$$

podemos afirmar que $\frac{x}{y}$ vale:

a) -12 b) 12 c) 36 d) -36 e) $-\frac{1}{6}$

16. (Ufc) Sejam A e B matrizes 3 × 3 tais que detA = 3 e detB = 4. Então det(A × 2B) é igual a:
a) 32 b) 48 c) 64 d) 80 e) 96

17. (Uepg) Sendo M uma matriz quadrada inversível, de ordem 3, assinale o que for correto.

01) Se $\det(M) = 5$ e $\det(2 \cdot M^{-1} \cdot M) = x + 1$, então $x = 7$.

02) Se $\det(M) = 4$ e se k é um número real tal que $\det(k \cdot M) = 108$, então $k = 9$.

04) Se $\det\left(\frac{1}{2} \cdot M\right) = 24$, então $\det(M^t) = 3$.

08) Se $\det(M) = 2x + 6$ e $\det(M^t) = x + 10$, então $\det(M \cdot M^t) = 16$.

16) Se $\det(M) = x + 2$ e $\det(M^{-1}) = x - 8$, então o produto dos possíveis valores de x é -17.

18. (Ufu) Sejam A e B matrizes quadradas e invertíveis, tais que $x = \det(A)$ e $y = \det(B)$ satisfaçam as equações $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9$ e $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 31$.

Logo, é correto afirmar que $\det(A^2B^{-1})$ é igual a

a) $\frac{4}{25}$. b) $\frac{4}{21}$. c) $\frac{4}{17}$. d) $\frac{4}{11}$.

19. (Ueg) Sendo x e y, respectivamente, os determinantes das matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -4a & -4c \\ 5b & 5d \end{bmatrix},$$

é verdade que $\frac{y}{x}$ é igual a

a) $\frac{1}{20}$ b) $-\frac{1}{20}$ c) 20 d) - 20 e) $\frac{3}{20}$

20. (Pucpr) Sejam A, B e C matrizes inversíveis de ordem 4. Se, det(A) = 640, det(B) = 10 e $A = B \cdot (2C)$, então $\det(C^{-1})$ – o determinante da matriz inversa de C – é igual a: a) 4 b) 32 c) 0,125 d) 0,25 e) $\frac{1}{32}$

21. (Uece) Se M é uma matriz quadrada, define-se, para cada número natural n maior do que um, as seguintes matrizes:

$M^2 = M \cdot M, M^3 = M^2 \cdot M, \ldots, M^n = M^{n-1} \cdot M.$

Para a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, o valor do determinante da matriz M^{2021} é igual a a) 2021. b) 1. c) –2021. d) –1.

22. (Mackenzie) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com determinante maior que zero e A^{-1} a sua inversa. Se 16 . det A^{-1} = det (2A), então o determinante de A vale:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 2 e) 16

23. (Ita)

Se $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$**, então o valor do**

$$\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$$

é igual a

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

24. (Esc. Naval) Sejam as matrizes A e B, ambas de ordem 4x4, com det A = -1 e det B = 2. Calcule o determinante da matriz X sabendo que $A^{-1} \cdot B^T \cdot X = 2A^T$ e assinale a opção correta.
a) –8 b) 8 c) –16 d) 16 e) 32

Gabarito:

1:[E] **2:**[B] **3:**[A] **4:**[C] **5:**[D] **6:**[B] **7:**[E] **8:**[A] **9:**[E] **10:**[B] **11:**[E] **12:**[E] **13:**[A] **14:**[D] **15:**[E] **16:**[E] **17:**17 **18:**[A] **19:**[D] **20:**[D] **21:**[D] **22:**[D] **23:**[D] **24:**[B]

Resolução em: joaocapri.com.br/det

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[E]

Pelo Teorema de Binet, sabemos que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B),$ com A e B sendo matrizes invertíveis. Além disso, temos $\det(kA) = k^n \cdot \det(A),$ em que k é um número real e n é a ordem da matriz invertível $A.$ Portanto, segue que

$$\begin{aligned}\det(3A) = \det(A^2) &\Leftrightarrow 3^3 \cdot \det(A) = \det{}^2(A) \\ &\Leftrightarrow \det(A) \cdot (\det(A) - 27) = 0 \\ &\Rightarrow \det(A) = 27.\end{aligned}$$

Resposta da questão 2:
[B]

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 10 & 2 \end{vmatrix}$$

Filas paralelas e proporcionais

Todo o determinante com filas paralelas e proporcionais vale zero.

Resposta da questão 3:
[A]

I. Verdadeira. Ao permutarmos duas filas paralelas de uma matriz quadrada $A,$ obtemos uma matriz $B,$ tal que $\det B = -\det A.$

II. Falsa. Como:

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

vem

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 27 \cdot (-2) = -54 \neq -6.$$

III. Verdadeira. Se uma matriz quadrada apresenta uma fila de zeros, então seu determinante é nulo.

IV. Verdadeira. Sabendo que uma matriz quadrada com duas filas paralelas proporcionais tem determinante nulo, vem:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2.$$

Resposta da questão 4:
[C]

Tem-se que

$$\begin{aligned}\det(2AB) &= 2^2 \det(AB) \\ &= 4 \det A \det B \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 40.\end{aligned}$$

Resposta da questão 5:
[D]

A nova matriz foi obtida de A da seguinte forma:

1. Foram trocadas as posições das colunas 1 e 3, (o determinante fica multiplicado por -1).
2. A nova quarta linha foi multiplicada por 3 (o determinante fica multiplicado por 3).
3. Somou-se a terceira linha com a quarta linha, originando uma nova quarta linha (determinante não se altera).

Logo, o novo determinante será (-1).3.70 = - 210.

Resposta da questão 6:
[B]

$$\det\left(I \cdot B^{-1} \cdot A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}\right) \cdot \det(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}\right) \cdot 5 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\det B^{-1} = \frac{1}{15}$$

$$\det\left[3 \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right)^t\right] = \det\left[3 \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1}\right] = 3^n \cdot \det\left(A^{-1} \cdot B^{-1}\right) = 3^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{3^n}{3 \cdot 5^2} = \frac{3^{n-1}}{5^2}$$

Resposta da questão 7:
[E]

a) Não admite inversa, pois a linhas 1 e 3 são proporcionais e seu determinante vale zero.
b) Não admite inversa, pois a terceira linha é uma combinação linear das duas primeiras. Seu determinante também é zero
c) Não admite inversa, pois as linhas da matriz são proporcionais, seu determinante vale zero.
d) Não admite inversa, pois a terceira linha é igual ao dobro da segunda menos a primeira, seu determinante vale zero.
e) Seu determinante é – 36416 (diferente de zero). Logo, admite inversa.

Resposta da questão 8:
[A]

Resposta da questão 9:
[E]

Resposta da questão 10:
[B]

Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada por uma constante, seu determinante fica multiplicado por essa constante.

Trocando-se duas filas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por –1.

Para se obter, a partir de M, a matriz da alternativa [B], foram trocadas as posições das linhas 1 e 3, a segunda linha foi multiplicada por 3 e a segunda coluna multiplicada por 2.

Portanto, o determinante foi multiplicado por $(-1)\cdot 2\cdot 3=-6.$

Resposta da questão 11:
[E]

Resposta da questão 12:
[E]

$$\det B=\begin{vmatrix} m & t & k \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ m & t & k \end{vmatrix}=-\det A=-4.$$

Resposta da questão 13:
[A]

[I] $\det(A^T)=\det(A)=2$

[II] $\det(-B)=(-1)^3\cdot\det(B)=-1\cdot(-1)=1$

[III] $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}=\dfrac{1}{2}$

[IV] $\det(3A)=3^3\cdot\det(A)=27\cdot 2=54$

Portanto, apenas a informação [II] é verdadeira.

Resposta da questão 14:
[D]

$$\begin{aligned} A^{-1}BA=D &\Rightarrow \det(A^{-1}BA)=\det D \\ &\Rightarrow \frac{1}{\det A}\cdot\det B\cdot\det A=\det D \\ &\Rightarrow \det B=\det D=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=5 \end{aligned}$$

Resposta da questão 15:
[E]

Resposta da questão 16:
[E]

Resposta da questão 17:
01 + 16 = 17.

[01] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} \det(2\cdot M^{-1}\cdot M)=x+1 &\Leftrightarrow 2^3\cdot\det(M^{-1}\cdot M)=x+1 \\ &\Leftrightarrow x+1=8\cdot\det(I) \\ &\Leftrightarrow x+1=8\cdot 1 \\ &\Leftrightarrow x=7. \end{aligned}$$

[02] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} \det(k\cdot M)=108 &\Leftrightarrow k^3\cdot\det(M)=108 \\ &\Leftrightarrow k^3\cdot 4=108 \\ &\Leftrightarrow k=3. \end{aligned}$$

[04] Falsa. Na verdade, temos

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{1}{2}\cdot M\right)=24 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\det(M)=24 \\ &\Leftrightarrow \det(M)=192=\det(M^t). \end{aligned}$$

[08] Falsa. De imediato, vem

$$\begin{aligned} \det(M)=\det(M^t) &\Leftrightarrow 2x+6=x+10 \\ &\Leftrightarrow x=4. \end{aligned}$$

Assim, temos $\det(M)=\det(M^t)=14$ e, portanto, $\det(M\cdot M^t)=\det^2(M)=196.$

[16] Verdadeira. Tem-se que

$$\begin{aligned} \det(M)\cdot\det(M^{-1})=1 &\Leftrightarrow (x+2)(x-8)=1 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x-17=0. \end{aligned}$$

Em consequência, das Relações de Girard, podemos concluir que o produto das raízes dessa equação é igual a -17.

Resposta da questão 18:
[A]

Desde que $\dfrac{1}{x}=9-\dfrac{1}{y},$ temos

$$3\left(9-\frac{1}{y}\right)+\frac{4}{y}=31\Leftrightarrow\frac{1}{y}=4.$$

Logo, vem

$$\frac{1}{x}=9-4\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$$

A resposta é

$$\begin{aligned} \det(A^2\cdot B^{-1}) &=\det(A^2)\cdot\det(B^{-1}) \\ &=(\det A)^2\cdot\frac{1}{\det B} \\ &=x^2\cdot\frac{1}{y} \\ &=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot 4 \\ &=\frac{4}{25}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 19:
[D]

Resposta da questão 20:
[D]

Aplicando as propriedades dos determinantes, chegamos a:

$\det(A) = \det(B \cdot (2C))$

$\det(A) = \det(B) \cdot \det(2C)$

$640 = 10 \cdot 2^4 \det(C)$

$\det(C) = 4$

$\therefore \det(C^{-1}) = \dfrac{1}{4} = 0,25$

Resposta da questão 21:
[D]

Tem-se que

$$M^2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Desse modo, vem $M^n = \begin{cases} M, \text{ se n for ímpar} \\ I, \text{ se n for par} \end{cases}$.

Em consequência, podemos afirmar que $M^{2021} = M$ e, portanto, temos

$$\det M^{2021} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1.$$

Resposta da questão 22:
[D]

Resposta da questão 23:
[D]

Resposta da questão 24:
[B]

Aplicando o determinante em ambos os lados da equação dada e utilizando as propriedades conhecidas, chegamos a:

$\det(A^{-1} \cdot B^T \cdot X) = \det(2A^T)$

$\det(A^{-1}) \cdot \det(B^T) \cdot \det(X) = \det(2A^T)$

$\dfrac{1}{\det(A)} \cdot \det(B) \cdot \det(X) = 2^4 \cdot \det(A)$

$\dfrac{1}{-1} \cdot 2 \cdot \det(X) = 16 \cdot (-1)$

$\therefore \det(X) = 8$