Prof. João Capri

UNIDADE 01

MATRIZES

1.Conceitos Iniciais

O estudo das matrizes é de fundamental importância pelas inúmeras aplicações que apresenta nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia: Matemática, Física, Engenharia, Computação, etc.

Noção de Matriz

Na tabela abaixo colocamos as notas obtidas por três alunos em provas de matemática, física, química e biologia:

	MAT	FIS	QUI	BIO
João	8	3	2	4
Pedro	7	5	8	1
Paulo	5	7	9	6

Consultando a tabela podemos verificar que o aluno Pedro obteve a nota 8 em química. Observe que essa nota se encontra na segunda linha e terceira coluna da tabela. Essa tabela com linhas e colunas é o que denominamos de matrizes.

2. Definição

Uma matriz do tipo m x n (lê-se: m por n), m, n ≥ 1, é uma disposição tabular formada por m.n elementos dispostos em m linhas e n colunas. As matrizes são representadas através de parênteses ( ), colchetes [ ] ou através de barras duplas || ||

Exemplos.:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $A_{2\times 3}$ (lê-se: A dois por três)

A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \\ 6 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $A_{2\times 4}$ (lê-se: A dois por quatro)

A = $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$ $\mathbf{A_{3\times 2}}$ (lê-se: A três por dois)

3. Notações

3.1.Notação Explícita

Uma matriz genericamente é representada por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. Sendo assim, uma matriz $A_{m\times n}$ algebricamente pode ser representada assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ com m e n} \in \mathbb{N}^*$$

3.2.Notação Condensada

Podemos também, abreviar essa representação da seguinte forma:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Os elementos da matriz A são indicados por **aij** de forma que:
i ∈ {1, 2, 3,......m} (indicador da linha)
j ∈ {1, 2, 3, ...n} (indicador da coluna)

Exercício Resolvido

Explicite a matriz A = $(a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = 2i + j^2$

Resolução: A matriz 2x2 procurada é do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Pela lei de formação, temos:
$a_{ij} = 2i + j^2$
$a_{11} = 2.1 + 1^2 = 3$
$a_{12} = 2.1 + 2^2 = 6$
$a_{21} = 2.2 + 1^2 = 5$
$a_{22} = 2.2 + 2^2 = 8$

Portanto A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

4. Classificação de Matrizes

Seja a matriz A = $(a_{ij})_{m\times n}$, lembrando que m e n são respectivamente a quantidade de linhas e colunas da matriz A, temos:

a) MATRIZ LINHA se m = 1

Exemplo: $A_{1\times 3}$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) MATRIZ COLUNA se n = 1

Exemplo: $A_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) RETANGULAR se m ≠ n

Exemplo: $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) QUADRADA se m = n

Exemplo: $A_{2x2}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

Definição: Diz-se que uma matriz é quadrada se a quantidade de linhas for igual a quantidade de colunas. Pode-se dizer então que ela é n x n ou simplesmente de ordem **n**.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Possui duas diagonais

- diagonal principal (quando i = j para todo aij)
- diagonal secundária (quando i + j = n + 1) , onde n é a ordem da matriz.

5. Tipologia

5.1. Matriz Transposta

Seja A uma matriz de ordem m x n, denomina-se transposta de A a matriz de ordem n x m obtida, trocando-se de forma ordenada as linhas pelas colunas. Representa-se por**: A^t ou A'**

Exemplo $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $A^t_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

OBSERVAÇÃO: Seja uma matriz A de ordem n.

- Se $A = A^t$, então A é dita **SIMÉTRICA**

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

- Se $A = -\mathbf{A^t}$, então A é dita **ANTISIMÉTRICA** (–A indica matriz oposta de A que se obtém. trocando-se o sinal dos seus elementos)

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.2. Matriz Identidade

Uma matriz A de ordem n é dita identidade, ou unidade se os elementos da diagonal principal forem iguais a 1, e os demais elementos iguais a zero.

Exemplos**:** $\mathbf{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pode se indicar a matriz identidade por:

$I_n = [aij]$, $aij = \begin{cases} 1, \text{ para } i = i \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases}$

Importante: A matriz identidade é neutra na multiplicação de matrizes.

5.3. Matriz Nula

Uma matriz é dita nula quando todos seus elementos forem iguais a zero. A matriz Nula é neutra na soma de matrizes.

5.4. Matriz Diagonal

É toda matriz de ordem n tal que aij = 0 para i ≠ j.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.5. Matriz Triangular

É toda matriz quadrada onde aij = 0 para i > j ou/e para i < j.

Exemplos**:** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

6. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A_{mxn} e B_{mxn} são iguais, se os elementos correspondentes (elementos de mesmo índice) forem iguais.

7. Adição e subtração de matrizes

É efetuada somando-se ou subtraindo-se os elementos correspondentes das matrizes. (válido para matrizes de mesma ordem).

7.1. Propriedades:

1) A + B = B + A (propriedade comutativa)
2) A + (B + C) = (A + B) + C (propriedade associativa)
3) A + O = A (elemento neutro)
4) $(A + B)^t = A^t + B^t$

8. Produto de um número por matriz

Dado um número real **K** e uma matriz $A_{m\times n}$, denomina-se produto de K por A e indica-se por **k**.**A**, à matriz que se obtém multiplicando-se todo elemento de A por **k**.

8.1. Propriedades:

Sendo x e y dois números reais e A e B duas matrizes de mesma ordem valem as seguintes propriedades:

1) x . (yA) = (xy) . A
2) x . (A + B) = xA + xB
3) (x + y) . A = xA + yA

Prof. João Capri

Exercícios

01) (PUC-PR) Seja A = $(a_{ij})_{2x3}$ uma matriz dada por: $a_{ij} = \begin{cases} 2i, \text{se } i \geq j \\ i + j, \text{se } i < j \end{cases}$ Então, a matriz A, na forma de tabela é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

02) (UFSC) Dadas as matrizes: A = $\begin{pmatrix} 2x+1 & -3y & -1 \\ 0 & 4 & x+z \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 12 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Se A = B^t , o valor de x.y.z é:

03) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se A = A^t . Assim, se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ 2x+3 & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, então x é igual a:

a) – 2
b) – 1
c) 1
d) 3
e) 5

04) (UDESC) Sejam X e Y matrizes de ordem dois por dois tais que X + Y = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e X – Y = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$; logo a soma dos elementos da diagonal principal da matriz X é:

a) 14
b) 7
c) 9
d) 16
e) 8

05) (UDESC) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9^x & a & 0 \\ 4 & 16^y & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3^x & b & 1 \\ 1 & 4^{2y-1} & 2^{-1} \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 27 & 13 & -6 \\ b & 2^{2y-1}-10 & c \end{bmatrix}$. A soma dos quadrados das constantes **x**, **y**, **a**, **b** e **c** que satisfazem a equação matricial A – 6B = C é:

a) 26
b) 4
c) 41
d) 34
e) 16

Escreva, na forma explícita ,cada matriz abaixo:

06) $A = (a_{ij})_{2x2}$, com $a_{ij} = i + j$

07) $A = (a_{ij})_{3x2}$, com $a_{ij} = 3i - j^2$

08) $A = (a_{ij})_{3x2}$, com $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i^2, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

09) $A = (a_{ij})_{2x3}$, com $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i = j \\ 2 + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

10) Se a matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$, ela é chamada matriz anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e:

$$M = \begin{pmatrix} 4+a & a_{12} & a_{13} \\ a & b+2 & a_{23} \\ b & c & 2c-8 \end{pmatrix}.$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} valem respectivamente

a) – 4, – 2 e 4
b) 4, 2 e – 4
c) 4, –2 e – 4
d) 2, – 4 e 2
e) n.d.a.

11) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Obter a matriz X tal que A + X = B

b) Obter as matrizes X e Y tal que:

$$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = -B \end{cases}$$

12) (UFOP-MG) Observe a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

Determine x e y de tal forma que seu traço valha 9 e x seja o triplo de y.

Observação: Traço é a soma dos elementos da diagonal principal

13) Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2^y \\ 3+\log_2 x & 7 \end{pmatrix}$

e B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 5 & 16 & 7 \end{pmatrix}$. Determine o valor de x + y de modo que A = B^t

14) (UFPEL) Durante a Copa do Mundo 2006, muito se ouviu falar do "quadrado magico", aquele formado por Kaka, Ronaldinho Gaucho, Ronaldo Fenômeno e Adriano. Matematicamente, uma matriz quadrada de ordem n e chamada quadrado magico quando a soma dos numeros de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundaria da sempre o mesmo resultado.

Considerando a matriz M um quadrado mágico, onde

M = $\begin{pmatrix} x & 2y+1 & 2y-6 \\ y-1 & z+6 & x+3 \\ 2x & 2z+3 & 2z+8 \end{pmatrix}$

e a soma S dos elementos da diagonal principal é dada por S = $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$ em que n é a ordem da matriz M, é correto afirmar que

a) x = z
b) y < x
c) x < z
d) y = z
e) x = y

15) Uma matriz se diz anti-simétrica se A^t = –A. Nessas condições, se a matriz A é anti-simétrica, então, x + y + z é igual a:

A = $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

a) 3
b) 1
c) 0
d) –1
e) 3

16) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A = A^t$. Assim, se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ é simétrica, então x + y + z é igual a:

a) – 2
b) – 1
c) 1
d) 3
e) 5

17) (U. Católica de Salvador -BA) Uma matriz quadrada A, de ordem **n**, se diz anti-simétrica se $A = -A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A. Nessas condições, qual das matrizes seguintes é anti-simétrica?

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

18) Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{se } i < j \\ 7, \text{se } i = j \\ i^2 + j, \text{se } i > j \end{cases}$ o valor da expressão $2a_{23} + 3a_{22} - a_{21}$ é:

19) Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz X, tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{X + 2B}{3}$, é igual a:

20) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, o produto dos elementos da segunda linha de $\frac{1}{4}B - \frac{1}{2}A$ é:

a) 1
b) –1
c) 0
d) 2
e) –2

21) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$ e sendo 3A = B + C, então:

a) x + y + z + w = 11
b) x + y + z + w = 10
c) x + y – z – w = 0
d) x + y – z – w = –1
e) x + y + z + w > 11

22) Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A = (aij)$_{3 \times 3}$, onde aij = i + j se i ≥ j ou aij = i – j se i < j.

23) Calcule 5x + 2y, de modo que se tenha:

$$\begin{pmatrix} 5x-2 & 1 \\ 3y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ y-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

24) O número de matrizes que existem de ordem 2 com elementos de números naturais tais que $X + X^t = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ é:

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8

25) (UFRN) A matriz abaixo é 7x7 e foi formada com o número 1 em cada posição da primeira linha, um 0 e um 2, alternadamente, nas posições da segunda linha, dois 0 e um 3, também alternadamente, nas posições da terceira linha, e assim sucessivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Numa matriz 100x100, construída com o mesmo critério, a quantidade de números diferentes de zero na centésima coluna é

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.

GABARITO UNIDADE 01

1) d **2)** 28 **3)** a **4)** e **5)** a

6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ **9)** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

10) b

11) a) X = $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ b) X = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ Y = $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

12) 6 e 2 **13)** 36 **14)** e **15)** d

16) e **17)** b **18)** 34 **19)** $\begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

20) a **21)** b **22)** 12 **23)** 12 **24)** d **25)** b