

Determinantes 2

Prof. João Capri

1. (Eewb) O determinante da matriz $A_{4 \times 4}$ onde os elementos da primeira linha são 4, 3, 5 e 1; os elementos da segunda linha são 0, 3, 0 e 2; os da terceira linha são 2, 7, 0 e 0 e os da quarta linha, 8, 6, 10 e 2,

a) -5 b) 0 c) 5 d) 15

2. (Epcar (Afa)) Sejam a e b números positivos tais

que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale

24.

Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0 b) 6 c) -6 d) $\sqrt{6}$

3. (Efomm) Determine o valor de a , para o qual o determinante abaixo é nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 6 & a \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

4. (Ime) Dada a matriz A , a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

5. (Efomm) Dada uma matriz quadrada de ordem três M . Define-se a matriz de cofatores de M e denota-se por M' , a matriz que se obtém de M , substituindo cada elemento de M por seu cofator. Além disso, denota-se por $\bar{M}$ a matriz adjunta de M , que é definida como sendo a transposta da matriz de cofatores de M , isto é, $\bar{M} = (M')^t$.

Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, e defina a matriz $B = M \cdot \bar{M}$.

Qual é o valor da soma dos elementos da diagonal principal da matriz B ?

a) -15 b) -5 c) 3 d) 5 e) 15

6. (Uece) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^n = A^{n-1} \cdot A, \dots$$

Se d_n é o determinante da matriz A^n , então, a soma $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{2}{3}$. d) $\frac{3}{4}$.

7. (Pucpr Medicina) Os elementos a_{11} e a_{12} da matriz

quadrada $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ foram obtidos de

forma aleatória lançando-se duas vezes um dado comum honesto (dado com seis faces equiprováveis, numeradas de 1 a 6). Com o primeiro lançamento, ficou determinado o elemento a_{11} , o segundo lançamento resultou no valor do elemento a_{12} e, na sequência, verificou-se que a matriz M admite inversa. Qual a probabilidade de o determinante dessa matriz ser positivo?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{5}{12}$

8. (Epcar (Afa)) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & |a| & -4 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & |a| & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \text{ nas quais}$$

o elemento da 2ª linha e 2ª coluna é o módulo de a , com $a \in \mathbb{R}$, considere as proposições abaixo.

Análise e classifique corretamente cada uma quanto a ser (V) VERDADEIRA ou (F) FALSA.

- () As matrizes A e B comutam.
- () A matriz A possui determinante igual a 0 somente se $a = 1$ ou $a = -1$.
- () Se A e B são invertíveis, então $A^t B^{-1} = I$, em que A^t é a matriz transposta de A , B^{-1} é a matriz inversa de B e I a matriz identidade.

Sobre as proposições, tem-se que

- a) todas são falsas.
- b) todas são verdadeiras.
- c) apenas uma é verdadeira.
- d) apenas duas são verdadeiras.

9. (Ufpr) As únicas raízes reais do polinômio $p(x)$ dado pelo determinante abaixo são -2 e -1.

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} q(x) & x+2 & x^2+2x \\ x^2+x & 0 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo-se que o polinômio $q(x) = ax^2 + bx + c$ (com a, b e c constantes) tem as mesmas raízes reais de $p(x)$, é correto afirmar que:

- a) $b^2 - 4ac < 0$ e $a > \frac{3}{4}$.
 b) $b^2 - 4ac < 0$ e $a < \frac{3}{4}$.
 c) $b^2 - 4ac > 0$ e $a < \frac{3}{4}$.
 d) $b^2 - 4ac > 0$ e $a > \frac{3}{4}$.
 e) $b^2 - 4ac > 0$ e $a = \frac{3}{4}$.

10. (Ime) A soma dos inversos das soluções inteiras da equação

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

- a) 0 b) $-\frac{19}{30}$ c) -15 d) 15 e) $\frac{19}{30}$

11. (Ime) Determine o(s) valor(es) real(ais) de x tal(is) que

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

12. (Espm) Seja a matriz $M = (a_{ij})_{n \times n}$ tal que a_{ij} é o

binomial $\binom{i}{j}$. O valor do determinante de M é

- a) 0 b) n c) 1 d) -1 e) n^2

13. (Ufr-pss 2) Se o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

é igual a 0 (zero) então, o conjunto de todos os valores que x pode assumir é:

- a) $B = \{1, 4, 9\}$ b) $C = \{1, 8, 27\}$ c) $D = \{2, 4, 8\}$
 d) $A = \{1, 2, 3\}$ e) $E = \{3, 9, 27\}$

14. (Pucpr Medicina) Assinale a alternativa que corresponde à quantidade de raízes reais e distintas da equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 3x & 9x^2 & 27x^3 \\ 1 & -x & x^2 & -x^3 \end{vmatrix} = 0$$

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

15. (Ime) Calcule o(s) valor(es) de k real(is) para que o determinante da matriz abaixo seja igual a 24.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

16. (Unicamp) Considere a, b, c, d termos consecutivos de uma progressão aritmética de números reais com razão $r \neq 0$. Denote por D o

determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

É correto afirmar que $\frac{D}{r^2}$ vale

- a) -1. b) -2. c) -3. d) -4.

17. (Espcex (Aman)) O elemento da segunda linha e

terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

é:

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 0 d) -2 e) $-\frac{1}{3}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto abaixo para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Matrizes de Vandermonde são matrizes quadradas em que os elementos ao longo de cada linha formam progressões geométricas de primeiro termo igual a 1, não necessariamente com a mesma razão para cada linha.

Por exemplo, a matriz B a seguir, de ordem 4 é de Vandermonde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Seja V uma matriz de Vandermonde de ordem 3 em que a PG formada com os elementos da 1ª linha tem razão 2, a PG formada com os elementos da 2ª linha tem razão 3 e a PG formada com os elementos da 3ª linha tem razão -2.

18. (Insper) O determinante da matriz V é igual a

- a) -16. b) 0. c) 16. d) 20. e) 36.

Gabarito:

Resposta da questão 1:

[B]

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 10 & 2 \end{vmatrix}$$

Interchib®

Filas paralelas e proporcionais

Todo o determinante com filas paralelas e proporcionais vale zero.

Resposta da questão 2:

[D]

Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Leftrightarrow ab = 24.$$

Portanto, a resposta é

$$\begin{vmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{ab} - \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{24} - \sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{6} - \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{6}.$$

Resposta da questão 3:

[D]

Somando a segunda coluna na terceira e aplicando o teorema de Laplace na quarta linha, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 6 & a \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 & a \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & - \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & - \end{vmatrix}$$

$$= -4 - a + 0 - (-4 + 0 - 1) = -4 - a + 5 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

Resposta da questão 4:

[A]

Pela regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-2x \cdot x^2 & x-1 & 2 \\ (x+4)-2x & 0 & 0 \\ -1-2x \cdot x & 1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2x^3 & x-1 & 2 \\ 4-x & 0 & 0 \\ -1-2x^2 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace, utilizando a segunda linha da matriz, tem-se:

$$\det A = (4-x) \cdot \text{Cof}_{21} = (4-x) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-4) \cdot [(x-1) \cdot (x-2) - 2] = (x-4) \cdot (x^2 - 3x)$$

$$\det A = (x-4) \cdot (x^2 - 3x)$$

Para que $\det A = 0$, tem-se:

$$0 = (x-4) \cdot (x^2 - 3x)$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 3$$

Logo, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é 7 ($|4| + 0 + |3| = 7$).

Resposta da questão 5:

[A]

Vamos determinar a matriz adjunta de M inicialmente calculando seus cofatores:

$$C_{1,1} = (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -2$$

$$C_{1,2} = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$C_{1,3} = (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = 1$$

$$C_{2,1} = (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = -1 \cdot 3 = -3$$

$$C_{2,2} = (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 3 - 0 \cdot 2) = 9$$

$$C_{2,3} = (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -1 \cdot 1 = -1$$

$$C_{3,1} = (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = 2$$

$$C_{3,2} = (-1)^{(3+2)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = -1 \cdot 6 = -6$$

$$C_{3,3} = (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1$$

Assim, a matriz dos cofatores é:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz adjunta $\bar{M}$ é:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Segue que $B = M \cdot \bar{M}$ é:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & -6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 9 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 9 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-6) + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Portanto, a soma dos elementos da diagonal principal é $-5 + (-5) + (-5) = -15$.

Resposta da questão 6:

[A]

$$d_1 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = \det(A^2) = (\det(A))^2 = \frac{1}{16}$$

$$d_3 = \det(A^3) = (\det(A))^3 = \frac{1}{64}$$

⋮

$$d_n = \det(A^n) = (\det(A))^n$$

⋮

Estes determinantes, então, forma uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{4}$.

Portanto:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Resposta da questão 7:

[A]

Considerando que a matriz M admite inversa, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$$

Logo, o número de elementos do espaço amostral será dado por:

$$N(E) = 6 \cdot 6 - 6 = 30:$$

Para que o determinante seja positivo devemos ter $a > b$.

Logo, o evento será representado pelo conjunto A de elementos (a, b) abaixo:

$$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$$

$$N(A) = 15.$$

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Resposta da questão 8:

[D]

[I] Falsa. Como:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & |a| & -4 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & |a| & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & |a|+4 & -12 \\ |a|+4 & a^2+17 & 13 \\ -12 & 13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & |a| & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & |a| & -4 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & |a|+4 & 8 \\ |a|+4 & a^2+1 & -4|a| \\ 8 & -4|a| & 32 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

As matrizes A e B não comutam.

[II] Verdadeira. Os valores de a para os quais o determinante da matriz A é igual a 0 são:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & |a| & -4 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -16|a| + 16 = 0 \Rightarrow |a| = 1$$

$$\therefore a = 1 \text{ ou } a = -1$$

[III] Verdadeira. É possível notar que $A^t = B$. Logo:

$$A^t B^{-1} = B B^{-1} = I$$

Resposta da questão 9:

[C]

Como as raízes de $q(x)$ são reais e distintas, concluímos que $b^2 - 4ac > 0$.

Desenvolvendo o determinante e considerando que $q(x) = a(x+1) \cdot (x+2)$, já que -1 e -2 são raízes de $p(x)$ e de $q(x)$, temos:

$$p(x) = (x^2 + x) \cdot (x^2 + 2x) + (x+1) \cdot (x+2) - a \cdot (x+1) \cdot (x+2) - x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$

$$p(x) = x \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+2) - a \cdot (x+1) \cdot (x+2) - x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$

$$p(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 1 - a - x) = 0$$

Como -1 e -2 são as únicas raízes de $p(x)$,

concluímos que $(x^2 + 1 - a - x) = 0$ não possui raízes reais, logo:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4 \cdot (1-a) < 0 \Rightarrow -3 + 4a < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{4}$$

Resposta da questão 10:

[E]

Raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$(x-2)(x-3)(x+5) = 0$$

$$\therefore S = \{-5, 2, 3\}$$

Portanto, a soma dos inversos das soluções inteiras da equação é igual a:

$$\frac{1}{-5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30}$$

Resposta da questão 11:

Aplicando o teorema de Laplace na 1ª linha, obtemos:

$$x = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}}_A + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}}_B$$

$$x = 2A + B$$

Em que:

$$A = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 4x - 3$$

$$B = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 2 - 3x$$

Logo:

$$x = 2(4x - 3) + (2 - 3x)$$

$$x = 5x - 4$$

$$\therefore x = 1$$

Resposta da questão 12:

[C]

No binomial $\binom{i}{j}$, deve-se ter $i \geq j$. Dessa forma, a

única possibilidade para a matriz M é que ela seja de 1×1 :

$$M = [a_{11}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = [1]$$

Portanto, o seu determinante vale 1.

Resposta da questão 13:

[D]

Utilizando a propriedade do determinante de Vandermonde, podemos calcular o determinante de A da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)(3-1)(3-2)(2-1) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$$

Para que o determinante seja nulo, devemos ter:

$$2(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

Resposta da questão 14:

[A]

Trata-se de um determinante de Vandermonde. Sendo assim, o seu determinante é dado por:

$$(x-3) \cdot (3x-3) \cdot (-x-3) \cdot (3x-x) \cdot (-x-x) \cdot (-x-3x) = 0$$

$$(x-3) \cdot 3(x-1) \cdot (-x-3) \cdot 2x \cdot (-2x) \cdot (-4x) = 0$$

$$48x^3 \cdot (x-3) \cdot (x-1) \cdot (-x-3) = 0$$

O que resulta em 4 raízes reais e distintas, pois:

$$\begin{cases} x^3 = 0 \\ x-3 = 0 \\ x-1 = 0 \\ -x-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\therefore S = \{-3, 0, 1, 3\}$$

Resposta da questão 15:

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª coluna, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$3 + 12k + 4 - 8 - 3 - 6k + 3k + 12 + 2 - 4k - 2 - 9 = 24$$

$$5k - 1 = 24$$

$$\therefore k = 5$$

Resposta da questão 16:

[B]

Se a, b, c e d estão em progressão aritmética, então

$(a, b, c, d) = (a, a+r, a+2r, a+3r)$. Portanto, vem

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & a+r \\ a+2r & a+3r \end{vmatrix} \\ &= a(a+3r) - (a+r)(a+2r) \\ &= a^2 + 3ar - a^2 - 3ar - 2r^2 \\ &= -2r^2. \end{aligned}$$

$$\text{A resposta é } \frac{D}{r^2} = \frac{-2r^2}{r^2} = -2.$$

Resposta da questão 17:

[A]

Considere a matriz B a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ logo } b_{23} \text{ ser\u00e1 dado por:}$$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$b_{23} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot A_{32} = \frac{1}{3} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

Resposta da quest\u00e3o 18:

[D]

Do enunciado, temos:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Sarrus,

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det V = [1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-2)] - [4 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 4]$$

$$\det V = 22 - 2$$

$$\det V = 20$$