

Lista de Exercícios

Determinantes 1

Prof. João Capri

1. (Uerj) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2. (Eear) Para que o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 seja 3, o valor de b deve ser igual a

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2

3. (Espm) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
 a diferença entre os

valores de x , tais que $\det(A \cdot B) = 3x$, pode ser igual a:

a) 3 b) -2 c) 5 d) -4 e) 1

4. (Unicamp) Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0. b) 2. c) 5. d) 10.

5. (Unisc) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
 o determinante da matriz $A \cdot B$ é

a) 4 b) 6 c) 8 d) 12 e) 27

6. (Mackenzie) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 10, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \text{ e } B = (b_{ij})_{3 \times 3} \text{ tal que } \begin{cases} b_{ij} = 3, \text{ se } i = j \\ b_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases},$$

o valor de $\det(AB)$ é

a) 27×10^3 b) 9×10^3 c) 27×10^2
d) $3^2 \times 10^2$ e) 27×10^4

7. (Mackenzie) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix}$$
 é

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) $\frac{1}{3}$

8. (Udesc) Se A^T e A^{-1} representam, respectivamente, a transposta e a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$
 então o determinante da matriz

$B = A^T - 2A^{-1}$ é igual a:

a) $-\frac{111}{2}$ b) $-\frac{83}{2}$ c) -166 d) $\frac{97}{2}$ e) 62

9. (G1 - ifal) O valor do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$
 é:

a) 1. b) $\cos 2x$. c) $\sin 2x$.

d) $\tan 2x$. e) $\cos^2 x - \sin^2 x$.

10. (Uscs - Medicina) Considere a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4-z & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & y \\ z & 7 \end{bmatrix},$$
 em que x, y, z e w

são números reais. Sendo M a matriz $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$, o

determinante da matriz M é igual a

a) -7. b) -4. c) 0. d) 4. e) 7.

11. (Unicamp) Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$,

onde a e b são números reais distintos. Podemos afirmar que

a) a matriz M não é invertível.

b) o determinante de M é positivo.

c) o determinante de M é igual a $a^2 - b^2$.

d) a matriz M é igual à sua transposta.

12. (Pucrs) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$
 o determinante $\det(A \cdot B)$ é igual a

a) 18 b) 21 c) 32 d) 126 e) 720

13. (Eear) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 e X , tais que

$$X - A \cdot B = 2C.$$

Então $\det X =$ _____.

a) 20 b) 18 c) -8 d) -12

14. (Uece) Sobre a equação $\det M = -1$, na qual M é

a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{bmatrix}$ e $\det M$ é o determinante da

matriz M , pode-se afirmar corretamente que a equação

- a) não possui raízes reais.
- b) possui três raízes reais e distintas.
- c) possui três raízes reais, das quais duas são iguais e uma é diferente.
- d) possui três raízes reais e iguais.

15. (Feevale) O determinante da matriz

$\begin{bmatrix} \sin(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \cotg(x) \end{bmatrix}$ é

- a) 0 b) 1 c) $\sin(x)$ d) $\cos(x)$ e) $\tg(x)$

16. (Unigranrio - Medicina) Considere as funções

$f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $g(x) = \begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Desta forma,

pode-se afirmar que o ponto de interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$, é:

- a) (6, 30) b) (9, -90) c) (9, 72)
- d) (6, -42) e) (6, 42)

17. (Espcex (Aman)) Considere a matriz

$M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Se a e b são números reais

não nulos e $\det(M) = 0$, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a

- a) 15 b) 28 c) 35 d) 49 e) 70

18. (Uece) Considere as matrizes

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ..., $A^n = A^{n-1} \cdot A$, ..

Se d_n é o determinante da matriz A^n , então, a soma $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots$ é igual a

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

19. (Uece) Considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. se $X = P \cdot Q$ e $Y = Q \cdot P$, correto afirmar que

- a) o determinante de cada uma das matrizes X e Y é não nulo.
- b) o produto dos determinantes das matrizes X e Y é igual a 2.
- c) a soma dos determinantes das matrizes X e Y é igual a 2.
- d) a soma dos elementos da matriz Y é igual a 4.

20. (Espcex (Aman)) Sabendo que $x \in \mathbb{R}$, o produto dos valores de x que tornam nulo o determinante da

matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & |x| & x^2 \end{bmatrix}$ é igual a:

- a) -9 b) -3 c) 0 d) 3 e) 9

Gabarito:

Resposta da questão 1:

[A]

Resposta da questão 2:

[B]

Resposta da questão 3:

[C]

Resposta da questão 4:

[D]

Resposta da questão 5:

[A]

Resposta da questão 6:

[A]

Resposta da questão 7:

[C]

Resposta da questão 8:

[B]

Resposta da questão 9:

[A]

Resposta da questão 10:

[A]

Resposta da questão 11:

[B]

Resposta da questão 12:

[C]

Resposta da questão 13:

[B]

Resposta da questão 14:

[C]

Resposta da questão 15:

[B]

Resposta da questão 16:

[D]

Resposta da questão 17:

[C]

Resposta da questão 18:

[A]

Resposta da questão 19:

[C]

Resposta da questão 20:

[A]

Gabarito:**Resposta da questão 1:**

[A]

Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4)+12=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=1.$$

Portanto, como $1 > 0$, segue que a resposta é 1.**Resposta da questão 2:**

[B]

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, temos:

$$0 - b + 2 - 0 - 2b + 1 = 3 \Rightarrow -3b + 3 = 3 \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Resposta da questão 3:

[C]

De acordo com o Teorema Binet, segue que

$$\det(A \cdot B) = 3x \Leftrightarrow \det A \cdot \det B = 3x$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (x+2) = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4.$$

Portanto, a diferença entre os valores de x , tais que $\det(A \cdot B) = 3x$, pode ser igual a $4 - (-1) = 5$.**Resposta da questão 4:**

[D]

Desde que $2+a=a+b+1=b+4$, temos $a=3$ e $b=1$. Logo, vem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 10.$$

Resposta da questão 5:

[A]

Pelo Teorema de Binet, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, ou seja,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(AB) = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1)$$

$$\det(AB) = -2 \cdot (-2)$$

$$\det(AB) = 4$$

Resposta da questão 6:

[A]

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 10^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 3^3$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 10^3 \cdot 3^3 = 27 \cdot 10^3$$

Resposta da questão 7:

[C]

Calculando:

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1$$

Resposta da questão 8:

[B]

O determinante de A é igual a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 4$.

$$\text{Logo, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \text{ Daí,}$$

$$2A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

O resultado pedido é

$$\begin{vmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 5 \cdot \frac{11}{2} = -\frac{83}{2}.$$

Resposta da questão 9:

[A]

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Resposta da questão 10:

[A]

Resolvendo a equação matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4-z & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & y \\ z & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2 & 3 \\ 4-z & w+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & y \\ z & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2=3 \\ 3=y \\ 4-z=z \\ w+9=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \\ w=-2 \end{cases}$$

Logo, o determinante na matriz M é igual a:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

Resposta da questão 11:

[B]

Temos

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + a^2 + b^2 - 1 - ab - ab \\ &= (a-b)^2. \end{aligned}$$

Logo, sabendo que $a \neq b$ (o que implica em M não ser simétrica), tem-se $(a-b)^2 > 0$ para quaisquer a e b reais distintos, ou seja, o determinante de M é positivo. Em consequência, M é invertível.

Resposta da questão 12:

[C]

$$A \cdot B = [1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6] = [32] \text{ e } \det(A \cdot B) = 32$$

Resposta da questão 13:

[B]

Matriz X:

$$X - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, o determinante da matriz X é:

$$\det X = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6$$

$$\therefore \det X = 18$$

Resposta da questão 14:

[C]

Tem-se que

$$\begin{aligned} \det M &= -1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2x - x^3 - 1 - 4x = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0. \end{aligned}$$

Logo, a equação possui três raízes reais, das quais duas são iguais a $x = 0$ e a outra é $x = 1$.

Resposta da questão 15:

[B]

$$\begin{vmatrix} \sin(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \cotg(x) \end{vmatrix} = \sin(x) \cdot \sec(x) \cdot \cotg(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1$$

Resposta da questão 16:

[D]

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + x - 2x^2 - 2x = -x^2 - x$$

$$g(x) = \begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 11x - 80 + 44 - 2x^2 = -2x^2 + 11x - 36$$

$$-2x^2 + 11x - 36 = -x^2 - x \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$f(x) = y = -x^2 - x = -36 - 6 \Rightarrow y = -42$$

Resposta da questão 17:

[C]

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & a \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3a^4 + 5ab - 2a^3b - 3a^4 + 3ab^3 = \\ &= ab \cdot (5 - 2a^2 + 3b^2) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } 5 - 2a^2 + 3b^2 = 0 \end{aligned}$$

Como a e b não são nulos, devemos considerar que:

$$5 - 2a^2 + 3b^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3b^2 = 5$$

Portanto,

$$14a^2 - 21b^2 = 7 \cdot (2a^2 - 3b^2) = 7 \cdot 5 = 35$$

Resposta da questão 18:

[A]

$$d_1 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = \det(A^2) = (\det(A))^2 = \frac{1}{16}$$

$$d_3 = \det(A^3) = (\det(A))^3 = \frac{1}{64}$$

⋮

$$d_n = \det(A^n) = (\det(A))^n$$

⋮

Estes determinantes, então, forma uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{4}$.

Portanto:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Resposta da questão 19:

[C]

Matrizes X e Y:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes das matrizes X e Y:

$$\det X = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = 0$$

[A] Falso. O determinante de Y é nulo.

[B] Falso. O produto dos determinantes das matrizes X e Y é igual a 0.

[C] Verdadeiro. A soma dos determinantes das matrizes X e Y é igual a 2.

[D] Falso. A soma dos elementos da matriz Y é igual a 5.

Resposta da questão 20:

[A]

Para que o determinante da matriz seja nulo, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & |x| & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

Fazendo $|x| = y$:

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2$$

Logo:

$$|x| = -1 \text{ (não convém)}$$

ou

$$|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$$

E o produto desses valores vale:

$$-3 \cdot 3 = -9$$