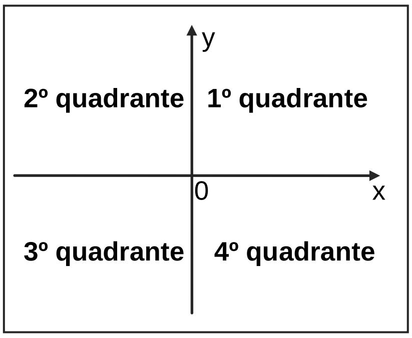
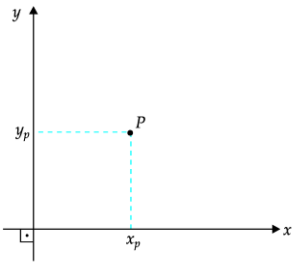
UNIDADE 01

GEOMETRIA ANALÍTICA
ESTUDO DO PONTO

O sistema cartesiano ortogonal como já vimos em funções, é composto por duas retas **x** e **y** perpendiculares entre si, no ponto O (origem). A reta x é denominada eixo das abscissas e a reta y é denominada eixo das ordenadas.
Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes numerados no sentido anti-horário.



Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados.
Então a cada ponto do plano cartesiano está associado um par ordenado (x, y) e vice-versa.



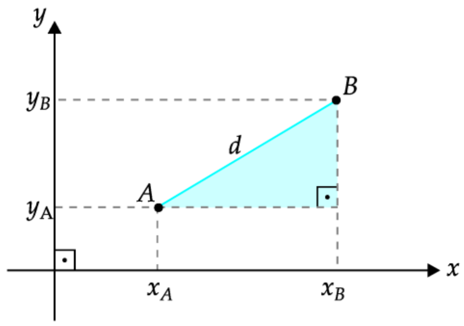
Dizemos que (x_p, y_p) são as coordenadas do ponto P, onde o número real x_p é chamado abscissa do ponto e o número real y_p é chamado ordenada do ponto.

OBSERVAÇÕES

- Se um ponto pertence ao eixo das abscissas, então sua ordenada é nula.
  P (x_p, 0)
- Se um ponto pertence ao eixo das ordenadas, então sua abscissa é nula.
  P (0, y_p)
- Se um ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então suas coordenadas são iguais
  $x_p = y_p$
- Se um ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então suas coordenadas são simétricas.
  $X_p = - y_p$

1. Distância entre dois pontos

Dados dois pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B) no plano cartesiano, a distância entre eles pode ser calculada em função de suas coordenadas. Observe a figura abaixo:



O triângulo ABC é retângulo em C, então:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

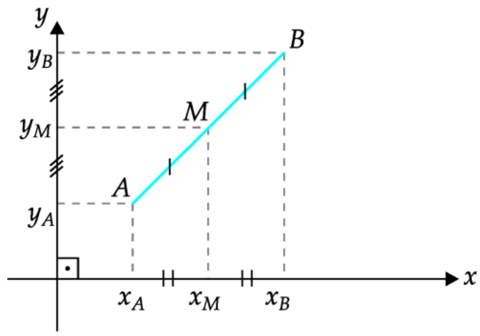
Daí vem a fórmula que calcula a distância entre dois pontos:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

2. Ponto Médio de um Segmento

Considere um segmento AB de extremidades A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B). Encontrar as coordenadas do ponto Médio M(x_M, y_M) é encontrar a média aritmética entre as coordenadas de A e B.

Observe a figura:



Pelo teorema de Tales temos que AM = MB, logo no eixo x tem-se:

$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \Rightarrow \quad x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

no eixo y tem-se:

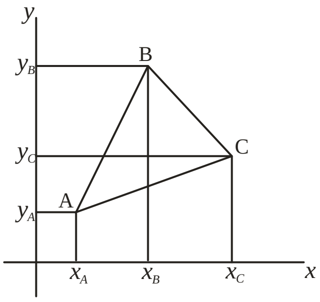
$y_M - y_A = y_B - y_M \quad \Rightarrow \quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Dessa forma as coordenadas do Ponto Médio terá as seguintes coordenadas

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

3. Área de um Triângulo conhecendo as coordenadas do vértice

Considere o triângulo abaixo:



Quando se conhece as coordenadas dos vértices A, B e C pode-se demonstrar que a área desse triângulo é dada por:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|}$$

OBSERVAÇÕES:

- O determinante $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ foi tomado em módulo, pois a área é indicada por um número positivo.
- Se o determinante $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ for nulo, dizemos que os pontos estão alinhados.

4. Coordenadas do Baricentro de um triângulo

Num triângulo ABC, denomina-se baricentro ou centro de gravidade ao ponto de encontro das medianas desse triângulo. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos, de maneira que o que tem extremidade em um vértice é o dobro do que tem extremidades no ponto médio do lado do triângulo.

As coordenadas do ponto G são dadas por:

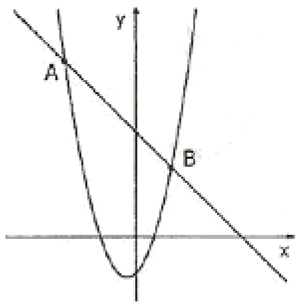
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_c}{3}$$

Exercícios

01) (UFRGS) Sendo os pontos A (– 1, 5) e B(2, 1) vértices consecutivos de um quadrado, o comprimento da diagonal desse quadrado é

a) 2
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $5\sqrt{2}$

02) (UFRGS – 2013) Considere os gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = 6 - x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos A e B, intersecção dos gráficos das funções f e g, como na figura abaixo.



A distância entre os pontos A e B é:

a) $2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$
e) $6\sqrt{2}$

03) (UFPEL) Na arquitetura, a matemática é usada a todo momento. A geometria é especialmente necessária no desejo de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir a medidas desses espaços. Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter o formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A(8,4); B(4,6); C(2,4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C é colocado um suporte para luminárias. Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento.

a) $\sqrt{37}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{17}$

04) Seja uma circunferência cujo centro pertence ao eixo das abscissas e os pontos (2, 2) e (8,4) as extremidades de uma de suas cordas. A área da superfície limitada por essa circunferência mede:

a) 20π
b) 36π
c) 40π
d) $20\sqrt{5}\pi$
e) 48π

05) (UFSC – 2012) A afirmação seguinte está CORRETA?

No plano cartesiano, os pontos de coordenadas $A(0,0), B(2,2)$ e $C(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ são os vértices de um triângulo isósceles.

06) Os pontos A(2, 4), B(-6, 2) e C(0, -2) são os vértices de um triângulo ABC. Calcular a área desse triângulo.

07) (FURG) Os pontos (1,3), (2,7) e (4,k) do plano cartesiano estão alinhados se e somente se

a) k = 15
b) k = 11
c) k = 14
d) k = 12
e) k = 13

08) (Mack-SP) Identifique a sentença falsa:

a) o ponto (0,2) pertence ao eixo y.
b) o ponto (4,0) pertence ao eixo x.
c) o ponto (500,500) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.
d) o ponto (80,-80) pertence à bissetriz dos quadrantes pares.
e) o ponto ($\sqrt{3}$ + 1, $\sqrt{3}$ + 1) pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

09) Considere os pontos M(4,-5) e N(-1,7) do plano x0y. Determine:

a) distância dos pontos M e N

b) ponto médio do segmento MN

10) (UFRGS) A distância entre os pontos A(-2,y) e B (6,7) é 10. O valor de y é:

a) -1
b) 0
c) 1 ou 13
d) -1 ou 10
e) 2 ou 12

11) (Cescea-SP) O ponto do eixo das abscissas, equidistantes dos pontos P(-2,2) e Q(2,6), é:

a) A(2,0)
b) B(5,0)
c) C(3,0)
d) D(0,2)
e) E(4,0)

12) Calcular a área do triângulo ABC. Dados: A(8, 3); B(4, 7) e C(2, 1)

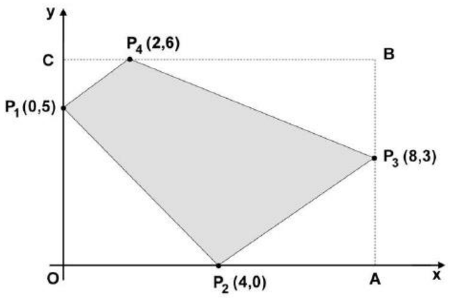
13) (UFPR) Durante um passeio, uma pessoa fez o seguinte trajeto: partindo de um certo ponto, caminhou 3 km no sentido norte, em seguida 4 km para o oeste, depois 1 km no sentido norte novamente, e então caminhou 2 km no sentido oeste. Após esse percurso, a que distância a pessoa se encontra do ponto de onde iniciou o trajeto?

14) (UFSC) Dados os pontos A(-1,-1); B(5,-7) e C(x,2), determine x sabendo que o ponto C é eqüidistante dos pontos A e B.

15) (FCC-BA) O triângulo cujos vértices são os pontos (1,3), (-2,-1) e (1, -2) é:

a) eqüilátero
b) escaleno
c) isósceles
d) retângulo
e) n.d.a.

16) (UFPR) Calcule a área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, cujas coordenadas cartesianas são dadas na figura ao lado.



17) (PUC-SP) Dados A(4,5), B(1,1) e C(x,4), o valor em módulo de x para que o triângulo ABC seja retângulo em B é:

18) (UFJF-MG) Se (2,1), (3,3) e (6,2) são os pontos médios dos lados de um triângulo, quais são os seus vértices?

a) (-1,2), (5,0), (7,4)
b) (2,2), (2,0), (4,4)
c) (1,1), (3,1), (5,5)
d) (3,1), (1,1), (3,5)

19) (UCP-RJ) A distância da origem do sistema cartesiano ao ponto médio do segmento de extremos (-2,-7) e (-4,1) é:

a) 3
b) 2
c) -3
d) 1
e) $3\sqrt{2}$

20) (Mack-SP) A área de um triângulo é 25/2 e os seus vértices são (0,1), (2,4) e (-7,k). O valor de k pode ser:

a) 3
b) 2,5
c) 2
d) 4
e) 5

21) A área do polígono, cujos vértices consecutivos são: A(10,4), B(9,7), C(6,10), D(-2,-4) e E(3,-5) em unidades de área, é:

22) (ACAFE-SC) A área, em unidades de área, do quadrilátero de vértices A(0,0), B(3,1), C(5,3), D(0,3), é:

a) 9,5
b) 19
c) 15
d) 7,5
e) 11,5

23) (UFSC) Um ponto material móvel P(-2 + t, $\frac{4t}{3}+2$) desloca-se no plano cartesiano e suas coordenadas variam em função do tempo t(t $\geq$ 0). A distância percorrida pelo ponto material móvel entre o ponto A para t = 0 e o ponto B para t = 6, é:

24) Calcule as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC, sabendo que AD é uma de suas medianas e que A(-5, 8) e D(1, -1).

a) (0, 2)
b) (-1, 2)
c) (2, -1)
d) (-1, 1)
e) (2, -2)

25) (IFSC – 2012) Três casas A, B e C estão situadas em um terreno plano. Um técnico precisa instalar uma antena repetidora de sinal, de forma que a antena fique à mesma distância de cada uma das três casas. Para resolver o problema, decide localizar as três casas num sistema cartesiano ortogonal, representadas pelos pontos A(6,3), B(2,3) e C(2,7). Com base nos dados acima, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. A distância entre as casas A e B é igual à distância entre as casas A e C.
02. O triângulo ABC determinado pelas três casas é isósceles.
04. A antena deve ser instalada no ponto que corresponde ao circuncentro do triângulo ABC.
08. A antena deve ser instalada no ponto (5,4).
16. A antena será instalada num ponto sobre o segmento de reta que liga as casas A e C.

GABARITO

1) e **2)** e **3)** c **4)** a **5)** sim **6)** 22 **7)** a
8) e
9) a)13 b) (3/2, 1)
10) c **11)** e **12)** 16 **13)** $2\sqrt{13}$ **14)** 08 **15)** c
16) 22
17) 03 **18)** a **19)** e **20)** a **21)** 81 **22)** a **23)** 10
24) b **25)** 22